

**Задачи олимпиады по дискретной математике и теоретической информатике  
2014 год, очный тур, 9-11 класс**

**Задача 1. Спам фильтр**

Среди электронных писем, которые мы получаем, иногда встречаются бесполезные письма — это навязчивая реклама или даже сообщения от мошенников. Такие письма называются спамом, и специализированные программы — спам-фильтры — занимаются автоматическим отловом таких сообщений.

Чтобы оценить качество работы спам-фильтра, вычислим «точность фильтра» и «полноту фильтра». Чтобы вычислить точность, необходимо взять все сообщения, которые фильтр отметил как спам, и поделить количество правильно отмеченных сообщений на общее количество отмеченных. Полнота равна количеству верно отмеченных спам сообщений к общему количеству спам сообщений. Например, если в нашем почтовом ящике находятся 100 писем, 5 из них являются спамом, фильтр отметил 10 сообщений как спам и при этом только три из них правильно, то точность такого фильтра равна  $3/10 = 0.3$ , а полнота равна  $3/5 = 0.6$ .

**Вопрос 1.** Какую полноту имеет фильтр, который отмечает все сообщения как спам?

Введем еще один параметр. F-меру фильтра. Если точность равна  $p$ , а полнота равна  $r$ , то  $F = \frac{2pr}{p+r}$ . В нашем примере  $F = \frac{2 \cdot 0.3 \cdot 0.6}{0.3+0.6} = \frac{0.36}{0.9} = 0.4$ . F-мера — всегда находится между точностью и полнотой ближе к меньшему из чисел. В примере выше 0.4 находится между 0.3 и 0.6, и оно ближе к 0.3, чем к 0.6.

	есть "акция"	нет "акция"
есть "бесплатно"	2 8	4 6
нет "бесплатно"	12 3	62 3

*(Примечание: В оригинале серым выделены клетки с числами 8, 6, 3, 3, что соответствует описанию в тексте.)*

Представим, что в нашем ящике 100 электронных сообщений. В некоторых сообщениях есть слово «бесплатно», в некоторых — слово «акция». Количество сообщений, имеющих и не имеющих данные слова, указано на рисунке. В сером круге отмечено количество сообщений, являющихся спамом.

Мы имеем 4 спам фильтра. Первый отмечает как спам все письма со словом «бесплатно», второй — все письма со словом «акция», третий — все письма, содержащие оба этих слова, четвертый отмечает как спам абсолютно все письма.

**Вопрос 2.** Какой из этих фильтров имеет наибольшую точность?

**Вопрос 3.** Какой — наибольшую полноту?

**Вопрос 4.** Какой — наибольшую F-меру?

**Задачи олимпиады по дискретной математике и теоретической информатике  
2014 год, очный тур, 9-11 класс**

### Решение задачи 1

	I	II	III	IV
полнота	14/20	11/20	8/20	1
точность	14/20	11/25	8/10	20/100
F-мера	14/20	22/45	16/30	2/6

**Вопрос 1.** Полнота = 1

**Вопрос 2.** Третий

**Вопрос 3.** Четвертый

**Вопрос 4.** Первый

### Задача 2. Шел Кондрат в Ленинград...

Все вы, наверное, знаете загадку из детской книги К.И.Чуковского.



Шел Кондрат в Ленинград,  
А навстречу — 12 ребят.  
У каждого по 3 лукошка,  
В каждом лукошке — кошка,  
У каждой кошки — 12 котят,  
У каждого котенка в зубах по 4 мышонка.

**Вопрос.** Укажите, где находится мышонок номер 191.

Для этого нужно считать, что все ребята пронумерованы слева-направо от 1 до 12, лукошки у каждого из них пронумерованы от 1 до 3 и т. д.  
В ответе надо указать номер ребенка от 1 до 12, номер лукошка от 1 до 3, номер котенка от 1 до 12 и номер мышонка от 1 до 4.

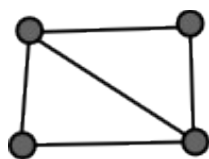
### Решение задачи 2

**Вопрос.** 2-ой ребенок, 3-е лукошко, 12-ый котенок, 3-ий мышонок

### Задача 3. Хроматическое число графа

«Правильно раскрасить граф в  $n$  цветов» означает покрасить каждую его вершину каким-то из этих  $n$  цветов так, чтобы любые две вершины, соединенные ребром, были покрашены в разные цвета.

**Задачи олимпиады по дискретной математике и теоретической информатике  
2014 год, очный тур, 9-11 класс**

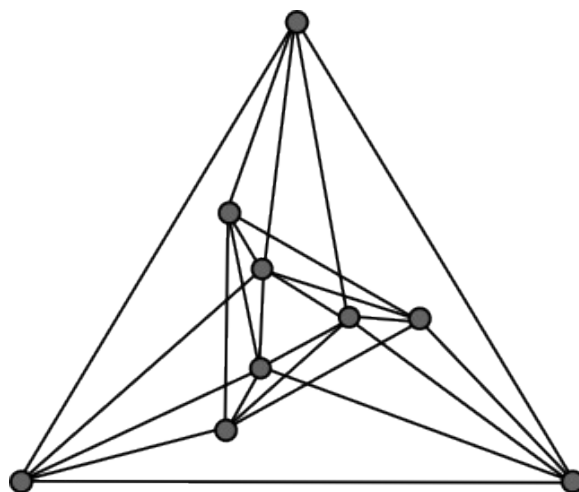


**Вопрос 1.** Сколькими способами можно правильно раскрасить граф, указанный на рисунке выше, в три цвета?

Хроматическим числом графа называется минимальное количество цветов, которое необходимо, чтобы его правильно раскрасить.

**Вопрос 2.** Найдите хроматическое число графа на рисунке справа.

**Вопрос 3.** Докажите, что хроматическое число графа, содержащего полный подграф с  $n$  вершинами, не меньше  $n$ .



**Вопрос 4.** Приведите пример графа с хроматическим числом 4, который не содержит ни одного полного подграфа с четырьмя вершинами.

Примечания. Полный граф — это граф, в котором каждая вершина соединена с каждой. Чтобы не рисовать вершины разными цветами, помечайте их числами от 1 до  $n$ .

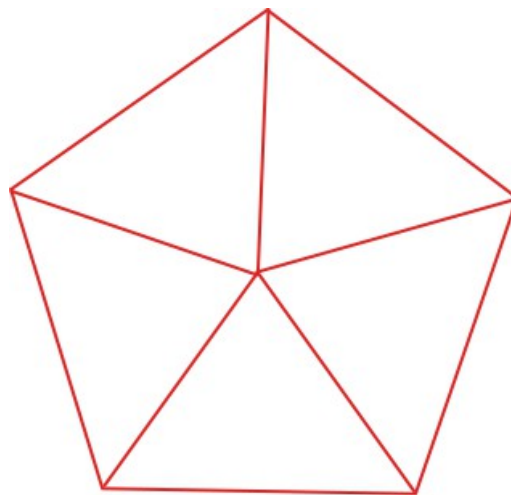
### **Решение задачи 3**

**Вопрос 1.** 6 способов

**Вопрос 2.** 3

**Вопрос 3.** Все вершины полного подграфа из  $n$  вершин при правильной раскраске должны иметь разные цвета, потому что иначе в этом подграфе есть две вершины одного цвета, соединенные ребром. Поэтому для правильной раскраски всего графа необходимо использовать как минимум  $n$  цветов.

**Вопрос 4.** См. Картинку справа



### **Задача 4. «2048»**

В одной из вариаций известной компьютерной игры «2048» на поле раз в 10 секунд падает «двойка» (число 2). В процессе игры игрок может выбрать любые два одинаковых числа. При этом выбранные числа исчезнут, а вместо них на поле возникнет одно число, равное их сумме. Цель игры — получить число 2048.

**Вопрос.** За какое минимальное время можно достичь цели?

**Задачи олимпиады по дискретной математике и теоретической информатике  
2014 год, очный тур, 9-11 класс**

### **Решение задачи 4**

**Вопрос.**  $2048 = 1024 + 1024 = 512 + 512 + 512 + 512 = \dots = 2 * 1024$ , т.е. для победы достаточно 1024 двойки, но не меньше. 1024 двойки появятся на поле после  $1024 * 10$  секунд. Или  $1023 * 10$  секунд, в зависимости от понимания условия.

### **Задача 5. Предложения на русском языке**

Чтобы составить простейшее предложение на русском языке, обычно нужно указать, кто делает действие, и какое он делает действие. Например, «кот ест». Часто нужно дополнительно указать, с чем совершается действие, например, «кот ест кашу». Тот факт, что предложение состоит из двух или трех частей, запишем с помощью следующей схемы: [Предложение] → [1] [2] или [1] [2] [3]. Укажем, какие могут быть части предложения. [1] → «кот» или «кролик» или «лиса». [2] → «ест» или «нюхает». [3] → «кашу» или «яблоко».

**Вопрос 1.** Сколько можно составить различных предложений по указанной выше схеме?

Что если мы хотим сказать не просто «кот ест кашу», а «пушистый кот ест кашу»? Изменим предыдущую схему следующим образом: [1] → [1а] или [1б] [1а]. [1б] → «пушистый» или «пушистая», [1а] → «кролик» или «лиса».

**Вопрос 2.** Сколько теперь можно составить различных предложений? Сколько из них грамматически корректных, и сколько грамматически некорректных? (Напомним, что в русском языке допустимо говорить «пушистый кот», «пушистый кролик», «пушистая лиса», а варианты «пушистая кот», «пушистая кролик», «пушистый лиса» — неправильные).

**Вопрос 3.** Как исправить схему, чтобы она описывала только корректные предложения?

**Вопрос 4.** Добавим в язык слово «спит». Составьте схему, которая позволит получать все корректные предложения, полученные ранее, а также все корректные предложения, содержащие новое слово.

Примечание. В ответах на вопросы 3 и 4 вы должны указать только схему, состоящую из набора выражений вида [...] → ....

### **Решение задачи 5**

**Вопрос 1.**  $3 * 2 + 3 * 2 * 2 = 18$

**Вопрос 2.**  $18 * 3$  всего,  $18 * 2$  корректных, 18 некорректных.

**Вопрос 3.**

[1] → [1м] или [1ж] или [1прил м] [1 м] или [1прил ж] [1 ж]

[1м] → «кролик» или «кот»

[1ж] → «лиса»

[1прил м] → «пушистый»

[1прил ж] → «пушистая»

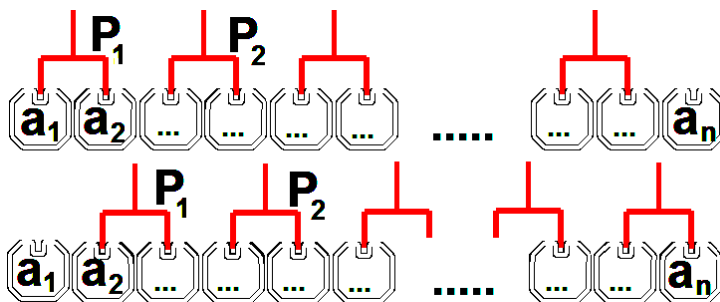
**Задачи олимпиады по дискретной математике и теоретической информатике  
2014 год, очный тур, 9-11 класс**

**Вопрос 4.** Заменяем правило для [Предложение]

[Предложение]  $\rightarrow$  [1] [2] или [1] [2] [3] или [1] "спит"

### **Задача 6. Параллельная сортировка**

Вася предложил выполнять сортировку нечетного количества чисел с помощью нескольких одновременно работающих процессоров:



На первом шаге процессор  $P_1$  сравнивает числа  $a_1$  и  $a_2$  и, если они не идут в порядке возрастания, меняет их местами. На этом же шаге процессор  $P_2$  упорядочивает пару  $a_3$  и  $a_4$  и т. д. Процессор  $P_k$  упорядочивает элементы с номерами  $2k-1$  и  $2k$ .

На втором шаге процессор  $P_1$  упорядочивает пару  $a_2$  и  $a_3$ , в общем случае процессор  $P_k$  упорядочивает элементы с номерами  $2k$  и  $2k+1$ .

Таким образом, на нечетных шагах сравнивают пары чисел, показанные на верхнем из рисунков, на четных — на нижнем.

**Вопрос 1.** Докажите, что предложенный алгоритм выполняет сортировку элементов, если его повторить достаточное число раз.

**Вопрос 2.** Сколько шагов достаточно для сортировки набора из 99 чисел?

**Вопрос 3.** Известно, что некоторый ряд из 99 чисел оказался отсортированным уже после второго шага. Какое наибольшее число обменов могло быть сделано?

**Вопрос 4.** Числом инверсий в наборе называется число пар элементов (не обязательно стоящих подряд), в которых левый элемент больше правого (то есть их надо менять местами). Сколько инверсий будут иметь наборы из предыдущего вопроса?

## **Решение задачи 6**

**Вопрос 1.**

Максимальный элемент каждые два шага обязательно перемещается вправо хотя бы на одну позицию, если он уже не стоит у правого края. После того, как он оказался справа, будем смотреть на второй по величине элемент, он тоже каждые два шага будет перемещаться вправо, рано или поздно встанет на свое место. И так далее, каждый элемент рано или поздно встанет на свое место.

**Вопрос 2.**

Достаточно иметь  $2 * 98 + 2 * 97 + \dots + 2 * 1$  шагов =  $98 * 99$  шагов. Потому что максимальному элементу надо сдвинуться 98 раз, он сдвигается каждые два шага.

**Вопрос 4.** За один раз делается  $98 / 2 = 49$  обменов. За два раза:  $49 + 49 = 98$

**Вопрос 5.** Каждый обмен добавляет одну инверсию, поэтому всего 98 инверсии в вопросе 4.